ОП «Политология», 2021-22
Введение в ТВиМС
Дополнительные задачи 1 (14.01 или 18.01 или 19.01)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, П. В. Ревина

Данный листок содержит задачи повышенной сложности, которые можно самостоятельно решать на семинаре, если разбираемые у доски задачи кажутся слишком простыми. Рекомендуется приступать к этим задачам только в том случае, если основной материал по теме усвоен и отработан. Задачи, аналогичным данным, не входят в формы контроля, предусмотренные на курсе.

Решение этих задач засчитывается как выступление у доски в случае, если студент приводит подробное, верное или преимущественно верное решение и готов ответить на вопросы преподавателя.

Задача 1. План очень маленького города N изображен на Рис. 1. В этом городе 3×2 прямоугольных квартала, которые разделены между собой прямыми улицами.

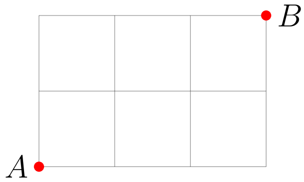

Рис. 1: город N

(a) Изобразите все возможные пути из точки A в точку B, считая, что странник хочет идти кратчайшим путем, то есть двигаться по сетке только слева направо или снизу вверх. Сколько получилось путей?

(b) Отметьте на плане города все перекрестки, где странник должен делать выбор, куда ему пойти: направо или вверх (включая точку A и исключая точку B). Сопоставьте каждому пути из предыдущего пункта последовательность из 0 и 1, где 0 означает, что странник должен идти наверх, а 1 – что он должен идти направо. Например, пути на Рис. 2 соответствует последовательность 10101.

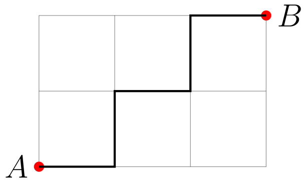

Рис. 2: пример пути из точки A в точку B

Утверждение. Пусть есть прямоугольная сетка размера $n \times k$. Точка A – левый нижний угол сетки, а точка B – правый верхний угол этой сетки. Число путей из точки A в точку B при описанном выше способе движения по сетке равно числу перестановок из n единиц и k нулей:

$$\mathrm{P}(k, n) = C_{n+k}^{n} = \frac{(n+k)!}{n!\ k!}.$$

Проверьте, что число путей, найденных вами в первом пункте, совпадает с числом путей, посчитанным по предложенной формуле. Используя сведения, полученные выше, решите следующую задачу.

Все дороги города M проходят по сетке, состоящей из прямоугольников размера $k \times l$, где k и l – целые неотрицательные числа (Рис. 3). Парк обозначен точкой $P(0, 0)$, кофейня – точкой $C(m, n)$.

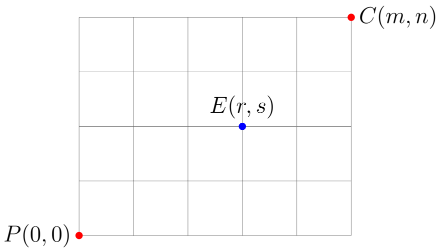

Рис. 3: город M

Группа друзей в день выборов кратчайшим путем направляется из парка в кофейню. В точке $E(r, s)$ находится избирательный участок.

(a) Найдите вероятность того, что друзья, не знающие об избирательном участке, смогут посетить его, если будут выбирать путь от парка до кофейни наугад.

(b) При $m = 6$, $n = 4$, $r = 3$ найдите значение s, определяющее наиболее выгодное расположение избирательного участка (с точки зрения посещения его жителями).

Задача 2. В круг радиуса r вписан квадрат. Середины сторон этого квадрата соединены линиями, как показано на Рис. 4. В круг бросают четыре точки. Чему равна вероятность того, что ровно одна точка попадет в закрашенную область?

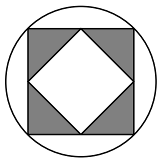

Рис. 4: иллюстрация к задаче 2

Задача 3. Монету бросают X раз – до тех пор, пока хотя бы одна из её сторон, не обязательно подряд, не выпадет дважды. Составьте ряд распределения случайной величины X, вычислите $E(X)$.

Задача 4. Пусть X – число решек, Y – число гербов, выпадающих при n бросаниях монеты, $W = \max(X, Y)$. Вычислите $\mathrm{E}(W)$ при $n = 6$.

Задача 5. Известно, что случайная величина X принимает лишь натуральные значния, причём

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{C}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

Найдите: a) константу C; b) $\mathrm{P}(X \leqslant 10)$.

Задачи и пояснения базируются на следующих источниках:

- Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. – М.: Форум, 2008.
- Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: МНЦМО, 2013.