ОП «Политология», 2020-21
Введение в ТВиМС
Биномиальное распределение. Совместное распределение случайных величин. Решения. (27.01.2021 или 29.01.2021)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева

Задача 1. Известно совместное распределение случайных величин X и Y. Каждая из этих случайных величин соответствует одному вопросу в некотором тесте знаний и описывает правильность ответа на него:

$X \setminus Y$	0	1
0	0.3	0.1
1	0.1	0.5

(a) Запишите маргинальные распределения случайных величин X и Y.

Для того, чтобы записать маргинальные распределения X и Y, нам нужно выяснить, какие значения эти случайные величины могут принимать и просуммировать вероятности по строкам (для X) и столбцам (для Y):

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1
p	0.4	0.6

(b) Проверьте, являются ли случайные величины независимыми.

Для проверки независимости случайных величин нам необходимо проверить выполнение следующего условия для всех пар значений $X = x_i$ и $Y = y_i$:

$$\mathrm{P}(X = x_i \cap Y = y_i) = \mathrm{P}(X = x_i) \cdot \mathrm{P}(Y = y_i).$$

Выберем пару $X = 0$ и $Y = 0$. Проверим условие. Вероятность пересечения событий $X = 0$ и $Y = 0$ мы берём из таблицы совместного распределения:

$$\mathrm{P}(X = 0 \cap Y = 0) = 0.3.$$

Вероятности $X = 0$ и $Y = 0$ мы берём из маргинальных распределений:

$$\mathrm{P}(X = 0) = 0.4 \text{ и } \mathrm{P}(Y = 0) = 0.4.$$

Видим, что $0.3 \neq 0.4 \cdot 0.4$. Следовательно, величины не являются независимыми.

(c) Найдите условную вероятность $\mathrm{P}(Y = 1 \mid X = 1)$ и сравните её с безусловной вероятностью $\mathrm{P}(Y = 1)$.

Вспомним формулу для условной вероятности событий:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Применим её к нашей задаче:

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{P(Y = 1 \cap X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}.$$

Опять, вероятность пересечения берём из таблицы совместного распределения, а вероятность для X – из маргинального.

Можем заметить, что условная вероятность $P(Y = 1 \mid X = 1)$ не равна безусловной вероятности $P(Y = 1)$. Это неудивительно, поскольку равенство этих вероятностей выполняется только для независимых событий или случайных величин.

(d) Запишите ряд распределения числа правильных ответов на эти два вопроса – суммы случайных величин. Запишите ряд распределения произведения случайных величин $X \cdot Y$.

В первой части задания нас интересует случайная величина $X + Y$. Какие значения принимает эта случайная величина? Обратимся к таблице совместного распределения и посмотрим, что получится, если мы просуммируем каждую пару значений:

$X = 0$ и $Y = 0$, значит $X + Y = 0 + 0 = 0$;
$X = 0$ и $Y = 1$, значит $X + Y = 0 + 1 = 1$;
$X = 1$ и $Y = 0$, значит $X + Y = 1 + 0 = 1$;
$X = 1$ и $Y = 1$, значит $X + Y = 1 + 1 = 2$.

Запишем полученные значения в ряд распределения, избегая повторов:

X+Y	0	1	2
p			

Теперь найдём вероятности. Когда $X + Y = 0$? Только в одном случае, когда $X = 0$ и $Y = 0$. Следовательно:

$$P(X + Y) = P(X = 0 \cap Y = 0) = 0.3.$$

Когда $X + Y = 2$? Тоже только в одном случае, когда $X = 1$ и $Y = 1$. Получаем:

$$P(X + Y) = P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.5.$$

Когда $X + Y = 1$? В двух случаях: $X = 0$ и $Y = 1$, $X = 1$ и $Y = 0$. Сложим соответствующие вероятности из совместного распределения: $0.1 + 0.1 = 0.2$.

Запишем ряд распределения:

X + Y	0	1	2
p	0.3	0.2	0.5

Во второй части задания нас интересует случайная величина $X \cdot Y$. Посмотрим на значения случайной величины:

$X = 0$ и $Y = 0$, значит $X \cdot Y = 0 \cdot 0 = 0$;
$X = 0$ и $Y = 1$, значит $X \cdot Y = 0 \cdot 1 = 0$;
$X = 1$ и $Y = 0$, значит $X \cdot Y = 1 \cdot 0 = 0$;
$X = 1$ и $Y = 1$, значит $X \cdot Y = 1 \cdot 1 = 1$.

Запишем ряд распределения (уже с вероятностями, их можно посчитать по аналогии со случаем $X + Y$):

X · Y	0	1
p	0.5	0.5