ОП «Политология», 2019-20
Математика и статистика, часть 2
Квантили нормального распределения (памятка)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок

Напоминание: квантиль уровня p – такое значение случайной величины, которое все остальные значения этой величины не превышают с вероятностью p. Другими словами, квантиль уровня p – это значение x_p случайной величины X, для которого выполняется следующее равенство:

$$\mathrm{P}(X \leqslant x_p) = p.$$

Задача 1. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Найти $z_{0.7422}$, квантиль уровня 0.7422.

Решение.

$$\mathrm{P}(Z \leqslant z_{0.7422}) = 0.7422$$

По определению функции распределения случайной величины левую часть равенства можно переписать так (Φ – функция распределения стандартной нормальной величины):

$$\Phi(z_{0.7422}) = 0.7422$$

В отличие от задач, где мы вычисляем вероятность, используя таблицу со значениями Φ в разных точках, здесь мы должны выполнить обратное действие – найти внутри таблицы значение 0.7422 и по нему «восстановить» значение z по строкам и столбцам. Значение 0.7422 находится на пересечении строки 0.6 и столбца 0.05, отсюда получаем ответ:

$$z_{0.7422} = 0.65$$

Квантиль уровня 0.7422 найден, это 0.65.

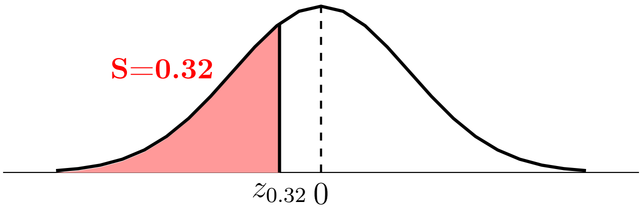
Задача 2. Случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Найти $z_{0.32}$, квантиль уровня 0.32.

Решение.

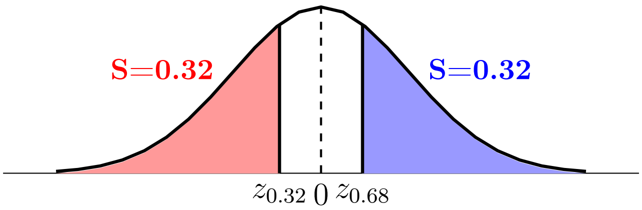
$$\mathrm{P}(Z \leqslant z_{0.32}) = 0.32$$

$$\Phi(z_{0.32}) = 0.32$$

Если мы посмотрим в таблицу, значения 0.32 среди вероятностей мы не обнаружим, все начинается с 0.5. Как быть? Представить себе график плотности распределения Z и подумать, где на нем располагается квантиль уровня 0.32. Точное расположение на глаз мы не определим, но однозначно можно сказать, что значение лежит слева от 0, поскольку 0 является медианой распределения, т.е. квантилем уровня 0.5, а нас интересует квантиль меньшего уровня.



Получается, что $z_{0.32}$ отрицательно. При этом площадь под графиком плотности слева от него равна 0.32. Давайте отразим график относительно вертикальной оси $Z = 0$ и найдем значение Z, площадь справа от которого будет равна 0.32.



Несложно догадаться, что это будет $z_{0.68}$, квантиль уровня $1 - 0.32 = 0.68$. В итоге получаем следующее:

$$z_{0.32} = -z_{0.68}$$

Точного значения 0.68 в таблице вероятностей нет, возьмем самое близкое к нему, 0.6808, и восстановим по нему z.

$$z_{0.32} = -0.47$$

Квантиль уровня 0.32 найден, это (-0.47).

Примечание: Такой алгоритм подходит для нахождения квантилей стандартного нормального распределения уровня менее 0.5, то есть при уровне $p < 0.5$ квантиль уровня p считается так: $z_p = -z_{1-p}$.

Задача 3. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(2, \sigma^2 = 9)$. Найти $x_{0.64}$, квантиль уровня 0.64.

Решение.

$$\mathrm{P}(X \leqslant x_{0.64}) = 0.64$$

Здесь мы уже работаем с произвольной нормальной величиной, не стандартной нормальной. Поэтому, чтобы действовать дальше по известному нам алгоритму, мы должны перейти к величине Z – стандартизовать значение выше, т.е. вычесть среднее и поделить на стандартное отклонение σ:

$$\mathrm{P}\left(Z \leqslant \frac{x_{0.64} - 2}{3}\right) = 0.64$$

А дальше все по знакомой схеме:

$$\Phi\left(\frac{x_{0.64}-2}{3}\right)=0.64$$

Смотрим в таблицу и находим вероятность 0.6406, ближайшую к 0.64. Восстанавливаем z:

$$\frac{x_{0.64}-2}{3}=0.36$$

Отсюда находим $x_{0.64}=0.36\times 3+2=3.08$. Это и есть ответ.

Задача 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(2,\sigma^2=9)$. Найти $x_{0.3}$, квантиль уровня 0.3.

Решение.

$$\mathrm{P}(X\leqslant x_{0.3})=0.3$$

Используем методы из предыдущих задач:

$$\mathrm{P}\left(Z\leqslant\frac{x_{0.3}-2}{3}\right)=0.3$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0.3}-2}{3}\right)=0.3$$

$$\frac{x_{0.3}-2}{3}=-z_{1-0.3}$$

$$\frac{x_{0.3}-2}{3}=-z_{0.7}$$

$$\frac{x_{0.3}-2}{3}=-0.52$$

Отсюда получаем ответ: $x_{0.3}=-0.52\times 3+2=0.44$.