

Математические и статистические методы в психологии**«Теорема Муавра-Лапласа» (3 модуль)**

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок

Постановка задачи

Из теории, предыдущих исследований, известна вероятность «успеха» в серии испытаний Бернулли p (доля людей, обладающих некоторым признаком). Зная эту вероятность, которая считается неизменной, мы проводим своё новое исследование (свою серию испытаний Бернулли), опрашиваем n человек и пытаемся вычислить, с какой вероятностью среди этих n человек встретятся от A до B человек, обладающих некоторым признаком.

Факты о распределениях

- Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения:
 $E(X) = np$, $D(X) = npq$.
- При $n \rightarrow \infty$ (на практике при $n > 30$) биномиальное распределение стремится к нормальному распределению, а именно: $N(np, \sigma^2 = npq)$.

Теорема

При большом n ($n \rightarrow \infty$) вместо точной формулы для подсчета биномиальных вероятностей можно использовать следующую:

$$P(A < S < B) = P\left(\frac{A - np}{\sqrt{npq}} < Z < \frac{B - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{B - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{A - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Задача 1. Для поступления в университет необходимо успешно сдать вступительный экзамен. По опыту известно, что в некотором университете N в среднем его выдерживают лишь 25% абитуриентов. Известно, что в приемную комиссию поступило 1890 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 500 поступающих успешно сдадут экзамен?

Решение. Испытание Бернулли – сдача вступительного экзамена одним человеком. Успех – успешная сдача, неудача – неуспешная сдача. Вероятность успеха $p = 0.25$, вероятность неудачи $q = 0.75$. Серия испытаний – 1890 заявлений (1890 экзаменов), поэтому $n = 1890$.

$$np = 1890 \cdot 0.25 = 472.5 \approx 473$$

$$npq = 1890 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 354.375 \approx 354$$

Далее по теореме:

$$\begin{aligned} P(S \geq 500) &= P\left(Z \geq \frac{500 - 473}{\sqrt{354}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{500 - 473}{\sqrt{354}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{500 - 473}{\sqrt{354}}\right) = 1 - \Phi(1.44) = 1 - 0.9251 = 0.0749. \end{aligned}$$

Задача 2. Найдите вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

Решение. Испытание Бернулли – один бросок монетки. Успех – выпадение орла, неудача – выпадение решки. Вероятность успеха $p = 0.5$, вероятность неудачи $q = 0.5$. Серия испытаний – 200, поэтому $n = 200$.

$$np = 200 \cdot 0.5 = 100$$

$$npq = 200 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 50$$

Далее по теореме:

$$\begin{aligned} P(90 < S < 110) &= P\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{50}} < Z < \frac{110 - 100}{\sqrt{50}}\right) = \Phi\left(\frac{110 - 100}{\sqrt{50}}\right) - \Phi\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{50}}\right) = \\ &= \Phi(1.41) - \Phi(-1.41) = \Phi(1.41) - (1 - \Phi(1.41)) = 0.9207 - (1 - 0.9207) = 0.8414. \end{aligned}$$