

ОП «Политология», 2019-20

Математика и статистика, часть 2

Дополнительные задачи 1 (16.01.2020)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок

Данный листок содержит задачи повышенной сложности, которые можно самостоятельно решать на семинаре, если разбираемые у доски задачи кажутся слишком простыми. Рекомендуется приступать к этим задачам только в том случае, если основной материал по теме усвоен и отработан. Задачи, аналогичным образом, не входят в формы контроля, предусмотренные на курсе.

Решение этих задач засчитывается как выступление у доски в случае, если студент приводит верное или частично верное решение и готов устно рассказать его преподавателю.

Задача 1. План очень маленького города N изображен на Рис. 1. В этом городе 3×2 прямоугольных квартала, которые разделены между собой прямыми улицами.

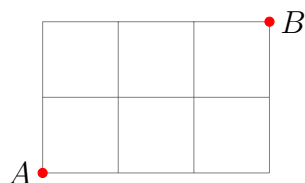


Рис. 1: город N

- Изобразите все возможные пути из точки A в точку B , считая, что странник хочет идти кратчайшим путем, то есть двигаться по сетке только слева направо или снизу вверх. Сколько получилось путей?
- Отметьте на плане города все перекрестки, где странник должен делать выбор, куда ему пойти: направо или вверх (включая точку A и исключая точку B). Сопоставьте каждому пути из предыдущего пункта последовательность из 0 и 1, где 0 означает, что странник должен идти направо, а 1 – что он должен идти вверх. Например, пути на Рис. 2 соответствует последовательность 10101.

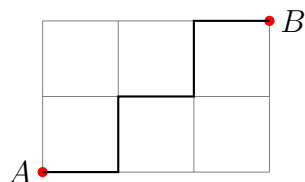


Рис. 2: пример пути из точки A в точку B

Утверждение. Пусть есть прямоугольная сетка размера $n \times k$. Точка A – левый нижний угол сетки, а точка B – правый верхний угол этой сетки. Число путей из точки A в точку B при описанном выше способе движения по сетке равно числу перестановок из n единиц и k нулей:

$$P(k, n) = C_{n+k}^m = \frac{(n+k)!}{n! k!}.$$

Проверьте, что число путей, найденных вами в первом пункте, совпадает с числом путей, посчитанным по предложенной формуле. Используя сведения, полученные выше, решите следующую задачу.

Все дороги города M проходят по сетке, состоящей из прямоугольников размера $k \times l$, где k и l – целые неотрицательные числа (Рис. 3). Парк обозначен точкой $P(0, 0)$, кофейня – точкой $C(m, n)$.

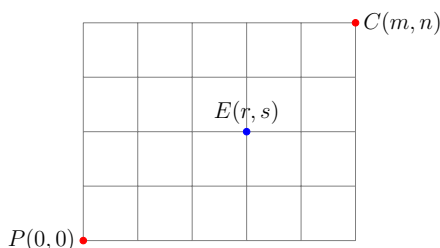


Рис. 3: город M

Группа друзей в день выборов кратчайшим путем направляется из парка в кофейню. В точке $E(r, s)$ находится избирательный участок.

- Найдите вероятность того, что друзья, не знающие об избирательном участке, смогут посетить его, если будут выбирать путь от парка до кофейни наугад.
- При $m = 6$, $n = 4$, $r = 3$ найдите значение s , определяющее наиболее выгодное расположение избирательного участка (с точки зрения посещения его жителями).

Задача 2. В круг радиуса r вписан квадрат. Середины сторон этого квадрата соединены линиями, как показано на Рис. 4. В круг бросают четыре точки. Чему равна вероятность того, что ровно одна точка попадет в закрашенную область?

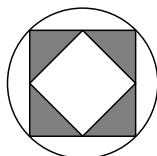


Рис. 4: иллюстрация к задаче 2

Задачи и пояснения базируются на следующих источниках:

- Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. – М.: Форум, 2008.
- Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: МНЦМО, 2013.