

Математические и статистические методы в психологии

Задачи для самостоятельного решения (к КР2)

А. А. Макаров, А. А. Тамбовцева, Н. А. Василёнок, Е. П. Шеремет

Не является типовым вариантом контрольной работы! Не стоит ожидать, что в контрольной работе будут такие же задачи с другими числами, но, если вы умеете решать эти задачи, значит, вы готовы к работе.

Задача 1. (№8.9) Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей. Значения X указаны в строках, значения Y – в столбцах.

$X \backslash Y$	-1	0	2
-1	3/24	4/24	1/24
1	1/24	?	7/24
2	5/24	1/24	0

Найдите:

- закон распределения случайной величины X ;
- закон распределения случайной величины Y ;
- $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$;
- $\text{Cov}(X, Y)$ и $\text{Cor}(X, Y)$.

Задача 2. (№8.10) Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей. Значения X указаны в строках, значения Y – в столбцах.

$X \backslash Y$	-2	0	2
0.2	0.03	0.05	?
0.6	0.15	0.30	0.35

Найдите:

- закон распределения случайной величины X ;
- закон распределения случайной величины Y ;
- $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$;
- $\text{Cov}(X, Y)$ и $\text{Cor}(X, Y)$.

Задача 3. Проинтерпретируйте значения ковариации и корреляции, полученные в предыдущих задачах: укажите направление и силу связи между величинами X и Y .

Задача 4. (№9.2) Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[3; 6]$. Найдите $P(3.6 \leq X \leq 7)$.

Задача 5. (№9.4) Постройте график плотности равномерного распределения на отрезке $[-1; 3]$. Чему равна функция плотности в точке: а) $x = 1$, б) $x = 4$.

Задача 6. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[10; 15]$.

- Найдите медиану распределения.

- (b) Найдите нижний и верхний квантили распределения.
 (c) Найдите квантили следующих уровней: 0.2, 0.45, 0.8.

Задача 7. Распределение случайной величины U определено следующей функцией плотности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}, & 2 \leq x \leq 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}$$

- (a) Найдите $f(6)$.
 (b) Найдите квантиль уровня 0.3.

Задача 8. (№9.9) Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность $P(-0.7 \leq Z \leq 8)$.

Задача 9. (№9.10) Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность $P(-2.1 \leq Z \leq 1.9)$.

Задача 10. (№9.13) Случайная величина X нормально распределена со средним 46 и дисперсией 36. Найдите вероятность $P(37 < X < 49)$.

Задача 11. (№9.16) На упаковке шоколадного батончика написано, что его масса равна 50 г. В действительности масса батончика — случайная величина, так как при производстве шоколада технологически трудно обеспечить точно заданную массу. Предположим, что масса шоколадного батончика подчиняется нормальному закону распределения $N(50; \sigma^2 = 1.44)$. Найдите вероятность того, что масса случайно выбранной шоколадки этого сорта:

- (a) меньше 48.8 г;
 (b) не меньше чем 49.3 г;
 (c) находится в пределах от 49.2 до 50.4 г.

Задача 12. (№9.18) В одной семье муж каждую неделю дарит жене букет цветов. Средняя стоимость букета — 400 руб., а стандартное отклонение равно 100 руб. Какова вероятность того, что стоимость очередного букета составит не менее 500 руб.? (Считайте, что сумма, затрачиваемая мужем на букет, нормально распределена с указанными параметрами.)

Задача 13. (№9.19) Средняя сумма чека в некоторой кофейне составляет 810 руб., а стандартное отклонение — 230 руб. Какова вероятность того, что очередной посетитель кофейни сделает заказ на сумму от 700 до 1100 руб.? (Считайте, что сумма чека — случайная величина, которая описывается нормальным законом распределения с указанными параметрами.)

Задача 14. Известно, что X и Z — независимые случайные величины. Величина X описывается следующим распределением: $X \sim N(-3, \sigma^2 = 16)$. Величина Z имеет стандартное нормальное распределение. Опишите распределение случайной величины U : укажите его вид, математическое ожидание и дисперсию.

(a) $U = X + Z$;

(b) $U = 4X - 2Z + 1$.

Задача 15. (№10.1) Всероссийский центр изучения общественного мнения в 2013 г. проводил опрос на тему «Российская Конституция: первые 20 лет». Согласно полученным данным, только 14% россиян ответили, что хорошо знают основные положения Конституции и читали её. Используя теорему Муавра—Лапласа, найдите вероятность того, что в выборке объема 1600 человек окажется от 250 до 350 человек, которые действительно знают основной закон государства.

Задача 16. (№10.14) Студенту, изучающему курс теории вероятностей, было дано задание — решить 30 задач. Исходя из опыта написания этим студентом контрольных работ по данному предмету, вероятность решить задачу без единой ошибки равна 0.8. Какова вероятность того, что студент решит не менее 26 задач без единой ошибки?

Задача 17. (№10.11) По данным Росстата на 2011 год вероятность того, что школьник Российской Федерации получает горячее питание, составляет 0.84. Найдите с помощью теоремы Муавра—Лапласа вероятность того, что из 1500 случайно выбранных российских школьников от 200 до 300 не получают горячее питание.