Разбор подготовлен учебными ассистентами Чаусовой А. (варианты 1-2) и Видяйкиной А.(варианты 3-4)

Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2. Вариант 1. ***Группы Тамбовцевой Аллы Андреевны***

Задача 1. *(2 балла)* Герой романа Ф.Кафки ходит по деревне и спрашивает прохожих, каким образом он может попасть в замок. Известно, что 10% жителей знают дорогу в замок. Какова вероятность, что в выборке из 100 прохожих будет не более 15 человек, знающих дорогу в замок?

Решение

Данная задача решается через теорему Муавра-Лапласа.

n = 100, p = 0,1

E(X) = np = 10

D(X) = npq = 9

$P\ (X \leq 15) = P(Z \leq \frac{15-10}{\sqrt{9}}) = P(Z \leq 1{,}67) = \Phi(1{,}67) = 0{,}9525$

Ответ: 0,95

Задача 2. *(2 балла)* Температура тела сов X описывается нормальным распределением со средним значением 40 и дисперсией 0.25. Найдите P(39 < X < 42), где X – температура тела сов.

Решение

E(X) = 40, D(X) = Var(X) = 0,25

Внутри неравенства нам необходимо стандартизировать значения, чтобы решить задачу:

$P\ (39 < X < 42) = P(\frac{39-40}{\sqrt{0{,}25}} < X < \frac{42-40}{\sqrt{0{,}25}}) = P(-2 < Z < 4) = \Phi(4) - \Phi(-2) = \Phi(4) - (1-\Phi(2)) = \Phi(4) + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) = 0{,}9772$

Ответ: 0,98

Задача 3. (*2 балла*) Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $X \sim N(2, \sigma = 1)$, $Y \sim N(3, \sigma = 4)$. Укажите закон распределения случайной величины $Q = X - 3Y + 2$. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Данная задача решается с использование свойств математического ожидания и дисперсии.

$E(Q) = E(X - 3Y + 2) = E(X) - 3E(Y) + 2 = 2 - 9 + 2 = -5$

$D(Q) = D(X - 3Y + 2) = D(X) + (-3^2)D(Y) = 1 + 9*16 = 145$

Ответ: $Q \sim N(-5, 145)$

Задача 4. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-5, 5]$.

a) *(0.5 балла)* Укажите значение плотности распределения f(x) этой случайной величины в точке x = 1.

Если величина имеет равномерное распределение, то график функции плотности распределения будет выглядеть как прямоугольник.

У этого прямоугольника мы знаем длинную сторону, она будет равна 10 (отрезок от -5 до 5 будет иметь длину 10).
Остается найти другую сторону. Площадь под графиком на этом участке – площадь прямоугольника, которая равна 1, так как нам дан график плотности. Необходимо поделить 1 на 10, получится 0,1. Это и есть искомое значение, т.к. значение плотности будет одинаковым для всех значений.

Ответ: 0.1

b) *(0.5 балла)* Укажите значение функции распределения F(x) этой случайной величины в точке x = 2.

$F(2) = P(X < 2) = P(-5 < X < 2)$

$(2 - (-5))*0,1 = 0,7$

Ответ: 0,7

c) *(1 балл)* Найдите верхний квартиль этой случайной величины.

Короткий способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,75, или $x_{0,75}$. Он делит ¾ и ¼ отрезка между собой. Т.к. распределение равномерное, мы можем найти ¼: 10/4 = 2,5.

Далее мы вычитает 2,5 из конца отрезка, и получается $x_{0,75}$ = 5–2,5 = 2,5.

Длинный способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,75, или $x_{0,75}$. Тогда P(X<$x_{0,75}$¿=0,75. Значит, нам надо найти такое значение X, площадь под графиком слева от которого будет равно 0,75.

Получается, нам нужно найти нижнюю сторону прямоугольника, площадь которого равна 0,75, боковая сторона равно 0,1 (как мы уже узнали). Обозначим эту нижнюю сторону как $x_{0,75}$ - (-5) (т.к. нижняя сторона начинается в координате -5, $x_{0,75}$ – ее конец, а длина стороны – разница между этими двумя точками).

Осталось записать уравнение.

($x_{0,75}$ +5)*0,1 = 0,75

$x_{0,75}$ = 2,5. Это и есть квантиль уровня 0,75.

Ответ: 2,5

Задача 5. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	–2	2
0	0.15	0.3
1	0.1	0.15
3	0	? = 0,3

а) (0.5 балла) Найдите вариацию (дисперсию) случайной величины X.

X	0	1	3
P	0.45	0.25	0.3

E(X) = 0*0.45 + 1*0.25 + 3*0.3 = 1.15
E(X^2¿= 1*0.25+ 9*0.3=2,95

D(X) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2}=2,95-1,32=1,63.
$\sigma(X)$ = 1,28

b) (1.5 балла) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Осуществляем аналогичные расчёты для Y.

Y	-2	2
P	0.25	0.75

E(У) = (-2)*0.25 + 2*0.75 = 1
E($У^2$¿=4*0,25 + 4*0,75 = 4
D(Y) = 4 – 1 = 3
$\sigma(Y)$ = 1,73

Cov(X,Y) = E(X*Y) – E(X)*E(Y)

Строим таблицу X*Y.

X*Y	0	-2	2	-6	6
P	0,45	0,1	0,15	0	0,3

E(X*Y) = -2*0,1 + 2*0,15 + 6*0,3 = 1,9
Cov(X,Y) = 1,9-1,15*1 = 0,75

Коэффициент корреляции
Cor(X,Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,75}{1,28*1,73}$= 0,34

Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2. Вариант 2. ***Группы Тамбовцевой Аллы Андреевны***

Задача 1. *(2 балла*) Совет по жилищно-коммунальному хозяйству государства Флатландия рассматривает законопроект об обязательном строительстве пятиугольных домов. Известно, что 70% членов Совета выступают за строительство таких домов. Какова вероятность того, что в выборке из 200 членов Совета будет не менее 150 человек, одобряющих законопроект?

Решение

Данная задача решается через теорему Муавра-Лапласа.

n = 200, p = 0,7

E(X) = np = 140

D(X) = npq = 42

P $(150 \leq X \leq 200) = P(\frac{150-140}{\sqrt{42}} \leq Z \leq \frac{200-140}{\sqrt{42}}) = P(\frac{10}{6,5} \leq Z \leq \frac{60}{6,5}) = \Phi(9) - \Phi(1,54) = 1 - \Phi(1,54) = 0,0618$

Ответ: 0,0618

Задача 2. (2 балла) Температура тела слонов X описывается нормальным распределением со средним значением 36 и стандартным отклонением 0.5. Найдите P(35 < X < 38), где X – температура тела слонов.

Решение

E(X) = 36, D(X) = Var(X) = 0,5*0,5=0,25

Внутри неравенства нам необходимо стандартизировать значения, чтобы решить задачу:

$P(35<X<38) = P(\frac{35-36}{\sqrt{0,25}} < X < \frac{38-36}{\sqrt{0,25}}) = P(-2 < Z < 4) = \Phi(4) - \Phi(-2) = \Phi(4) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(4) + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) = 0,9772$

Ответ: 0,98

Задача 3. (2 балла) Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $X \sim N(2, \sigma^2 = 1)$, $Y \sim N(-3, \sigma^2 = 4)$. Укажите закон распределения случайной величины $Q = -X + 2Y + 1$. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Данная задача решается с использование свойств математического ожидания и дисперсии.

$E(Q) = E(-X + 2Y + 1) = -E(X) + 2E(Y) + 1 = -2 - 6 + 1 = -7$

$D(Q) = D(-X + 2Y + 1) = (-1^2)D(X) + (2^2)D(Y) = 1 + 4*4 = 17$

Ответ: $Q \sim N(-7, 17)$

Задача 4. Случайная величина X имеет <u>равномерное</u> распределение на отрезке $[-6, 4]$.

a) (0.5 балла) Укажите значение <u>плотности</u> распределения f(x) этой случайной величины в точке x = 0.

Если величина имеет равномерное распределение, то график функции плотности распределения будет выглядеть как прямоугольник.

У этого прямоугольника мы знаем длинную сторону, она будет равна 10 (отрезок от -6 до 4 будет иметь длину 10).
Остается найти другую сторону. Площадь под графиком на этом участке – площадь прямоугольника, которая равна 1, так как нам дан график плотности. Необходимо поделить 1 на 10, получится 0,1. Это и есть искомое значение, т.к. значение плотности будет одинаковым для всех значений.
Ответ: 0,1

b) (0.5 балла) Укажите значение <u>функции</u> распределения F(x) этой случайной величины в точке x = 1.

$F(2) = P(X < 1) = P(-6 < X < 1)$

$(1 - (-6))*0,1 = 0,7$

Ответ: 0,7

c) (1 балл) Найдите нижний квартиль этой случайной величины.

Короткий способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,25, или $x_{0,25}$. Он делит ¼ и ¾ отрезка между собой. Т.к. распределение равномерное, мы можем найти ¼: 10/4 = 2,5.

Далее мы прибавляем 2,5 к началу отрезка, и получается $x_{0,25}$ = -6 + 2,5 = –3,5.

Длинный способ:

Верхний квантиль – это квантиль уровня 0,25, или $x_{0,25}$.Тогда P(X$<x_{0,25}$¿=0,25. Значит, нам надо найти такое значение X, площадь под графиком слева от которого будет равно 0,25.

Получается, нам нужно найти нижнюю сторону прямоугольника, площадь которого равна 0,25, боковая сторона равно 0,1 (как мы уже узнали). Обозначим эту нижнюю сторону как $x_{0,25}$ - (-6) (т.к. нижняя сторона начинается в координате -6, $x_{0,25}$ – ее конец, а длина стороны – разница между этими двумя точками).

Осталось записать уравнение.

($x_{0,25}$ +6)*0,1 = 0,25

$x_{0,25}$ = –3,5. Это и есть квантиль уровня 0,25.

Ответ: –3,5.

Задача 5. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	−1	1
0	0.4	0.3
1	0	0.1
4	0.1	? = 0.1

a) (0.5 балла) Найдите вариацию (дисперсию) случайной величины X.

Находим закон распределения X.

X	0	1	4
P	0.7	0.1	0.2

E(X) = 0*0.7 + 1*0.1 + 4*0.2 = 0,9
E(X^2¿=1*0,1 + 16*0,2 = 3,3
D(X) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2}= 3,3 – 0,81 = 2,49
$\sigma(X)$ = 1,6

Ответ: 2,49

b) (1.5 балла) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Выполняем аналогичные расчеты для Y.

Y	-1	1
P	0.5	0.5

E(У) = (-1)*0.5 + 1*0.5 = 0
E(y^2¿ = 1*0,5 + 1*05 = 1
D(У) = E(X^2¿–E(X¿¿^{2} = 1–0=1
$\sigma(Y)$ = 1

Cov(X,Y) = E(X*Y) – E(X)*E(Y)

Строим таблицу X*Y.

X*Y	0	-1	1	-4	4
P	0,7	0	0,1	0,1	0,1

E(X*Y) = 0,1 – 0,4 + 0,4 = 0,1

Cov(X,Y) = 0,1 – 0,9*0 = 0,1

Cor(X,Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,1}{1,6*1} =$ 0,0625

Ответ: 0,6

Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2, вариант 3

<u>Задача 1.</u> Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X/Y	**2**	**4**
0	0,25	0,2
1	0	0,25
4	0,1	? = 0,2

a) Найдите стандартное отклонение случайной величины Y.

Для начала найдем пропущенное значение в таблице. Это будет 0,2

Исходя из таблицы, распределение случайной величины У будет выглядеть следующим образом:

У	**2**	**4**
P	0,35	0,65

$У^2$	**4**	**16**
P	0,35	0,65

$E(Y) = 2*0{,}35 + 4*0{,}65 = 3{,}3$

$E(Y^2) = 4*0{,}35 + 16*0{,}65 = 11{,}8$

$D(Y) = E(Y^2) – (E(Y))^2 = 11{,}8 – 10{,}89 = 0{,}91$

Std(Y) = 0,954

Ответ: 0,954

b) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Cor(X, Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{std(x)*std(y)}$

Cov(X,Y) = E(X,Y) – E(X)*E(Y)

1.

X	**0**	**1**	**4**
P	0,45	0,25	0,3

X^2	**0**	**1**	**16**
P	0,45	0,25	0,3

$E(X) = 0*0{,}45 + 1*0{,}25 + 4*0{,}3 = 1{,}45$

$E(X^2) = 0*0{,}45 + 1*0{,}25 + 16*0{,}3 = 5{,}05$

$D(X) = 5{,}05 – 2{,}1025 = 2{,}9475$

Std(X) = 1,716

2. Строим ряд распределения величины Х*У

По таблице совместного распределения находим значения этой величины: 0, 2, 4, 8, 16

X*Y	**0**	**2**	**4**	**8**	**16**
P	0,45	0	0,25	0,1	0,2

E(X*Y) = 0*0,45 + 2*0 + 4*0,25 + 8*0,1 + 16*0,2 = 5

Cov(X,Y) = E(X,Y) – E(X)*E(Y) = 5 – 1,45*3,3 = 0,215

Cor(X, Y) = $\frac{Cov(X,Y)}{std(x)*std(y)} = \frac{0{,}215}{1{,}716*0{,}954}$ **= 0,131**

Ответ: 0,131

__Задача 2.__ **Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [−7, 3].**

a) __Укажите значение **плотности распределения f(x)** этой случайной величины в точке x = 0.__

Т.к. величина имеет равномерное распределение, график функции будет выглядеть как прямоугольник.

Мы можем найти его длинную сторону: это отрезок от -7 до 3, соответственно он имеет длину 10.

Площадь под графиком функции плотности будет равна 1, соответственно площадь нашего прямоугольника будет равна 1. Тогда, мы можем найти вторую сторону фигуры, так как мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Следовательно, вторая сторона равна 1/10 = 0,1. Это и есть значение плотности распределения f(x), так как значение плотности будет одинаковым для всех значений

Ответ: f(0) = 0,1

__b) Укажите значение **функции распределения F(x)** этой случайной величины в точке x = 2.__

F(2) = P(x<2) = P(-7<x<2) = (2-(-7))*0,1 = 0,9

Ответ: 0,9

__c) Найдите **квантиль уровня 0.2** этой случайной величины.__

$(x_{0,2} – (-7))*0,1 = 0,2$

$x_{0,2} + 7 = 2$

$x_{0,2} = -5$

Ответ: $x_{0,2}$ = -5

__Задача 3.__ **Число книг по психологии, которые студенты первого курса успевают прочитать в течение учебного года, описывается нормальным законом распределения со средним значением 8 и стандартным отклонением 2. Найдите вероятность того, что число книг по психологии, прочитанных случайно выбранным студентом, будет больше 6 и меньше 8.**

X ~ N(8, σ= 2)

P(6<X<8) - ?

Для начала нужно провести стандартизацию значений:

$Z_1 = \frac{6-8}{2} = -1$

$Z_2 = \frac{8-8}{2} = 0$

$P(6<X<8) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1)) = 0{,}5 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}3413$

Ответ: $P(6<X<8) = 0{,}3413$

<u>Задача 4.</u> Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $X \sim N(-2, \sigma2 = 9)$, $Y \sim N(-3, \sigma2 = 4)$. Укажите закон распределения случайной величины $Q = X + 4Y - 3$. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.

$E(Q) = E(X + 4Y - 3) = E(X) + 4*E(Y) - 3 = -2 + 4*(-3) -3 = -17$

$D(Q) = D(X + 4*Y - 3) = D(X) + 16*D(Y) - 0 = 9 + 16*4 = 73$

Ответ: $Q \sim N(-17, \sigma^2 = 73)$

<u>Задача 5.</u> По результатам опроса, проведенного агенством «НЕ В(ОПРОС)», известно, что 30% респондентов считает, что СМИ освещают ситуацию в экономике объективно. Найдите вероятность того, что в выборке объема 1000 человек окажется от 275 до 315 человек, которые считают, что СМИ освещают ситуацию в экономике объективно.

Исходя из условия, вероятность удачного исхода p=0,3, а n=1000

Задача решается с использованием теоремы Муавра-Лапласа:

$p=0{,}3$, $n=1000$, $q = 1 - p = 0{,}7$

$E(X) = n*p = 300$

$D(X) = n*p*q = 210$

$P(275<X<315) = P(\frac{275-300}{\sqrt{210}} < Z < \frac{315-300}{\sqrt{210}}) = P(-1{,}72<Z<1{,}03) = \Phi(1{,}03) - \Phi(-1{,}72) = \Phi(1{,}03) - (1 - \Phi(1{,}72)) = 0{,}8485 - (1 - 0{,}9573) = 0{,}8058$

Ответ: $P(275<X<315) = 0{,}8058$

Математические и статистические методы в психологии (2019-2020)

Контрольная работа 2, вариант 4

Задача 1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [−9, 9].

а) Укажите **значение плотности распределения f(x)** этой случайной величины в точке x = 1.

Т.к. величина имеет равномерное распределение, график функции будет выглядеть как прямоугольник.

Мы можем найти его длинную сторону: это отрезок от -9 до 9, соответственно он имеет длину 18.

Площадь под графиком функции плотности будет равна 1, соответственно площадь нашего прямоугольника будет равна 1. Тогда, мы можем найти вторую сторону фигуры, так как мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Следовательно, вторая сторона равна 1/18. Это и есть значение плотности распределения f(x), так как значение плотности будет одинаковым для всех значений

b) Укажите **значение функции распределения F(x)** этой случайной величины в точке x = 3.

$F(3) = P(x<3) = P(-9<x<3) = (3 – (-9))*1/18 \approx 0,66$

c) Найдите **квантиль уровня 0.8** этой случайной величины.

$0,8 = (x_{0,8} – (-9))*1/18$

$14,4 = x_{0,8} + 9$

$x_{0,8} = 5,4$

Задача 2. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано следующей таблицей (значения X в первом столбце, а значения Y – в первой строке):

X\Y	**3**	**5**
-1	0,2	0
0	0	0,25
3	0,15	? = 0,4

а) Найдите стандартное отклонение случайной величины X.

X	**-1**	**0**	**3**
P	0,2	0,25	0,55

X^2	**0**	**1**	**9**
P	0,25	0,2	0,55

$E(X) = -1*0,2 + 0*0,25 + 3*0,55 = 1,45$

$E(X^2) = 0 + 1*0,2 + 9*0,55 = 5,15$

$D(X) = 5,15 – 2,1025 = 3,0475$

$Std(X) = 1,75$

Ответ: Std(X) = 1,75

b) Найдите корреляцию Cor(X, Y).

Y	**3**	**5**
P	0,35	0,65

Y	**9**	**25**
P	0,35	0,65

E(Y) = 3*0,35 + 5*0,65 = 4,3

$E(Y^2)$ = 9*0,35 + 25*0,65 = 19,4

D(Y) = 19,4 – 18,49 = 0,91

Std(Y) = 0,954

Далее построим ряд распределения для величины X*Y. По таблице совместного распределения находим значения этой величины: -5, -3, 0, 9, 15

X*Y	**-5**	**-3**	**0**	**9**	**15**
P	0	0,2	0,25	0,15	0,4

E(X*Y) = 0 + -3*0,2 + 0 + 9*0,15 + 15*0,4 = 6,75

Cov(X,Y) = = E(X,Y) – E(X)*E(Y) = 6,75 – 1,45*4,3 = 0,515

Cor(X, Y) = $\boldsymbol{\frac{Cov(X,Y)}{std(x)*std(y)} = \frac{0,515}{1,75*0,954}}$**= 0,3084**

Ответ: Cor(X, Y) = 0,3084

<u>**Задача 3.**</u> **Известно, что X и Y – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение X ∼ N(−1, σ = 9), Y ∼ N(3, σ = 4). Укажите закон распределения случайной величины Q = X − 3Y − 1. Ваш ответ должен включать название распределения, его математическое ожидание и дисперсию.**

E(Q) = E(X – 3Y – 1) = E(X) – 3*E(Y) – 1 = -1 – 3*3 – 1 = -11

D(Q) = D(X – 3Y – 1) = D(X) + 9*D(Y) – 0 = 81 + 9*16 = 225

Ответ: Q~ N(-11, $\boldsymbol{\sigma^2}$ **= 225)**

Задача 4. Анна выяснила, что процент студентов, которые посещают все пары в течение учебного года, имеет нормальное распределение со средним значением 50 и стандартным отклонением 10. Найдите вероятность, посещающих все пары, примет значение больше 62, но меньше 72.

P(62<X<72) = ?

Сначала нужно стандартизировать значения:

$Z_1 = \frac{62-50}{10} = 1,2$

$Z_2 = \frac{72-50}{10} = 2,2$

$P(62<X<72) = P(1,2<Z<2,2) = Ф(2,2) – Ф(1,2) = 0,9861 - 0,8849 = 0,1012$

Ответ: $P(62<X<72) = 0,1012$

<u>Задача 5.</u> Представители Контроля Чести и Права обсуждают, одобрить или не одобрить решение исследователя Мвена Маса уехать на остров Забвения после неудачного эксперимента. Известно, что 40% представителей Контроля готовы проголосовать за решение Мвена Маса уехать. Найдите вероятность того, что в выборке из 100 представителей Контроля за отъезд исследователя выскажутся более 50 членов Контроля Чести и Права.

Исходя из условия задачи:

$p = 0,4$ - вероятность успешного исхода

$q = 1 – 0,4 = 0,6$ – вероятность неудачи

$n = 100$

$P(50<X<100) = ?$

Задача решается через теорему Муавра-Лапласа:

$E(X) = n*p = 40$

$D(X) = n*p*q = 24$

$P(50<X<100) = P(\frac{50-40}{\sqrt{24}} < Z < \frac{100-40}{\sqrt{24}}) = P(2,04<Z<12,25) = P(Z>2,04) = 1 – Ф(2,04) = 1 - 0,9793 = 0,0207$

Ответ: 0,0207